

peron) zur Ruhe kommt und eine relativ energiearme Kernzertrümmerung auslöst.

Ladung des Teilchens (aus der  $\delta$ -Strahlendichte):  
1  $e$ ,

Masse des Teilchens (Korndichte-Reichweite):  
 $\sim 2000 m_e$ .

Aus der ausgelösten Kernzertrümmerung emittierte Teilchen: 1 Proton (105 MeV), 1 Proton (31 MeV), 1 Rückstoßkern.

Diese Daten deuten darauf hin, daß es sich bei dem Teilchen um ein negatives Hyperon handelt, das gemeinsam mit einem  $K_{u2}$ -Meson erzeugt wurde.

*Ereignisse Nr. 2, 3 und 4:* Tab. 3 gibt einige der experimentellen Daten zu drei sonstigen  $K_u$ -Zerfällen im Ruhezustand. In allen diesen Fällen konnten bei der Untersuchung der Spuren der Ursprungsterne keine weiteren instabilen schweren Teilchen

identifiziert werden. Der besseren Übersicht wegen sind auch die Daten zu Ereignis Nr. 1 teilweise noch einmal in Tab. 3 enthalten.

Die Untersuchungen über die Eigenschaften schwerer Mesonen werden fortgesetzt in Emulsionen, die am Bevatron in Berkeley exponiert worden sind.

Herrn Dr. M. CECCARELLI danken wir für anregende Diskussionen. Die Mikrophotographien wurden von Frau H. BAUMBACH angefertigt. Zu Dank verpflichtet sind wir ferner den Mitgliedern der Mikroskopiergruppe, die die Emulsionen durchmusterten; die beschriebenen Ereignisse wurden von Fr. B. ARNDT (1 Hyperfragment), Frau H. BAUMBACH (1 K-Einfang, 1 K-Zerfall), Fr. L. BISCHOFF (2 Hyperfragmente, 2 K-Zerfälle), Fr. I. FECHNER (1 K-Zerfall) und Fr. K. PÄTZOLD (2  $\tau$ -Mesonen) aufgefunden.

Zwei von uns (B. R., J. R.) verdanken der Argentinischen Atomenergiekommission ein Stipendium.

## Das Potential in doppelt gekrümmten Kondensatoren

VON R. ALBRECHT

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule München  
(Z. Naturforschg. 11 a, 156—163 [1956]; eingegangen am 7. Dezember 1955)

Für eine Klasse von Toroidkondensatoren wird das Potential im ungestörten Gebiet mit Hilfe von Reihenentwicklungen untersucht. Ferner werden die Abmessungen eines Toroidkondensators ermittelt, falls die Feldgrößen vorgegeben sind.

Bei verschiedenen Anwendungen in der Ionen- bzw. Elektronenoptik werden als Ablenkorgane Kondensatoren benutzt, deren Elektroden doppelt gekrümmte Flächen sind<sup>1</sup>. Da solche Kondensatoren technisch meist durch Teile der Oberfläche von Toroiden mit gemeinsamer Rotationsachse realisiert werden, hat sich für sie der Name „Toroidkondensatoren“ eingebürgert. Die Abbildungseigenschaften solcher Kondensatoren entsprechen denen *doppelt* gekrümmter Linsen, so daß sie eine *dreidimensionale* Optik ermöglichen.

Zur Bestimmung der optischen Konstanten eines Toroidkondensators ist die Kenntnis des Potentialverlaufs notwendig. Leider scheitert die exakte Ermittlung an der Kompliziertheit der mathematischen Behandlung, so daß man darauf angewiesen ist, das Potential approximativ mit Hilfe einer Potenzreihe

darzustellen, die im interessierenden Gebiet so gut konvergiert, daß die ersten Glieder bereits eine ausreichende Näherung ergeben. Für eine GAUSSsche Dioptrik samt Untersuchung der Bildfehler genügt eine Berücksichtigung der Glieder bis zur dritten Ordnung einschließlich<sup>2</sup>. Im folgenden soll für eine Klasse technisch wichtiger Toroidkondensatoren eine approximative Darstellung des Potentials gegeben werden<sup>3</sup>.

### I. Formulierung des Problems. Ungestörter Potentialverlauf

Wir legen ein rechtwinkliges  $xyz$ -Koordinatensystem zugrunde, wählen in der  $xz$ -Ebene zwei Punkte  $(m_1; 0)$ ,  $(m_2; 0)$  ( $-\infty < m_1, m_2 < \infty$ ) und

<sup>1</sup> z. B. H. EWALD u. H. LIEBL, Z. Naturforschg. 10a, 872 [1955].

<sup>2</sup> H. MARSHALL, Phys. Z. 45, 1 [1944].

<sup>3</sup> Eine von O. HACHENBERG, Ann. Phys., Lpz. 2, 225 [1948] angegebene Reihenentwicklung bis zu den Gliedern 2. Ordnung für eine speziellere Klasse von Toroidkondensatoren ist infolge ihrer Herleitung nur bedingt anwendbar.



zwei Radien  $\varrho_1, \varrho_2$  ( $-\infty < \varrho_1, \varrho_2 < \infty$ ) und betrachten die Kreisbogen (Abb. 1)

$$\begin{aligned} x &= m_i + \varrho_i \cos \vartheta_i, & -\Theta_i \leq \vartheta_i \leq \Theta_i, \\ z &= \varrho_i \sin \vartheta_i, & i = 1, 2 \end{aligned}$$

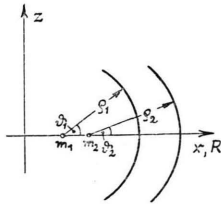


Abb. 1.

Die positiven Konstanten  $\Theta_i$  sollen so klein sein, daß die Kreisbogen keinen gemeinsamen Punkt besitzen, zumindest aber  $\Theta_i \leq \pi$  ist. Die Kreisbogen sind also symmetrisch zur  $x$ -Achse und können eine Gestalt nach Abb. 2 nebst entsprechenden Übergangsformen (Parallelkreise) haben.

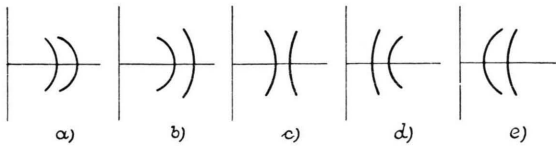


Abb. 2.

Als Grenzfälle ergeben sich Formen nach Abb. 3.

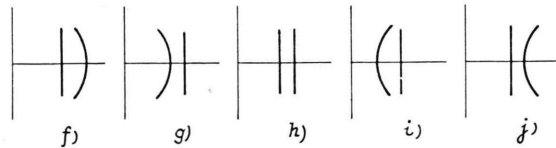


Abb. 3.

Die angegebenen Kreisbogen sollen als Meridiankurven dienen, indem wir die  $x$ - bzw. die  $z$ -Achse mit der  $R$ - bzw.  $z$ -Achse eines Zylinderkoordinatensystems  $R, z, \varphi$  zur Deckung bringen und nun die Meridianebene  $R, z$  so um die  $z$ -Achse rotieren lassen, daß für den Winkel  $\varphi = \angle(R, x)$  gilt

$$-\pi \leq -\Phi \leq \varphi \leq \Phi \leq \pi.$$

Die so durch Rotation der beiden Kreisbogen entstehenden Flächen  $F_1$  und  $F_2$  sollen unter Vernachlässigung der Elektrodenicke für unsere Betrachtung die Elektroden eines Toroidkondensators darstellen.

Wir treffen folgende Voraussetzungen und Annahmen, die bei den meisten technischen Anwendungen erfüllt sind:

Setzt man

$$R_1 = m_1 + \varrho_1, \quad R_2 = m_2 + \varrho_2$$

und sind die Indizes so gewählt, daß  $R_2 > R_1$  ist, so soll der Abstand

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_1 \cdot \Phi, \varrho_1 \Theta_1, \varrho_2 \Theta_2$$

sein.

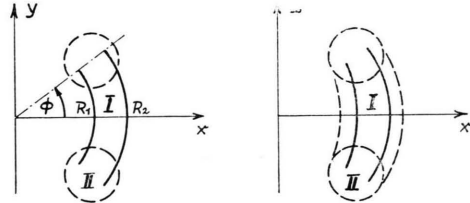


Abb. 4.

Dann unterteilen wir in ein Gebiet I im Kondensatorinneren und ein Gebiet II, das schlauchartig die Kondensatorränder (die Kanten der Flächen  $F_1$  und  $F_2$ ) umgibt (Abb. 4). Das durch die Ränder „gestörte“ Potential soll nur im Gebiet II wirksam sein. Im Gebiet I soll zufolge obiger Voraussetzungen das Potential durch dasjenige ersetzt werden können, das ungestört ist und für  $\Phi = \pi$  eintritt, also von  $\varphi$  unabhängig ist.

Wir stellen dann das Potential  $V$  in einer Meridianebene  $R, z$  durch eine Potenzreihe in zwei geeigneten Veränderlichen dar, wobei wir um einen beliebigen Punkt

$$R = R_0, \quad z = 0; \quad R_1 \leq R_0 \leq R_2$$

entwickeln. Dabei soll  $d$  so klein sein, daß unsere Entwicklung auf  $F_1$  und  $F_2$  gültig ist und die Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt werden können. Die Beschränkung auf Glieder bis zur dritten Ordnung ist getroffen worden, um den Rechenaufwand gering zu halten. Prinzipiell können beliebig viele Glieder berechnet werden.

Zur Ermittlung des Potentials im Gebiet I kann ein allgemeines Prinzip angewandt werden, das darin besteht, vorgegebene analytische Randflächen, auf denen die Potentialwerte vorgeschrieben sind, als Koordinatenflächen eines dreifach orthogonalen krummlinigen Koordinatensystems aufzufassen, die LAPLACESche Differentialgleichung auf diese Koordinaten zu transformieren und geeignete Lösungsansätze zu versuchen. Im besonderen können dadurch auch die Leiterpotentiale gefunden werden, indem man konstante Randwerte fordert.

Sind die Randflächen Rotationsflächen mit gemeinsamer Rotationsachse, so tritt dabei eine Vereinfachung auf, weil das Leiterpotential von der dritten Koordinate  $\varphi$  unabhängig ist und das Problem zweidimensional wird. Sind dann beispielsweise zwei Kurven in der Meridianebene  $R, z$  als Ränder vorgegeben, so kann die komplexe  $(R + iz)$ -Ebene so auf eine  $w$ -Ebene ( $w = u + iv$ ) konform abgebildet werden, daß die Bilder der Randkurven zwei parallele Geraden  $v = v_i = \text{const}$  sind ( $i = 1, 2$ ) (Abb. 5). Die in der  $(R + iz)$ -Ebene gelegenen Bilder der Geraden  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  liefern dann ein krummliniges orthogonales Koordinatensystem der gewünschten Art<sup>4</sup>. Die konforme Abbildung dient hier nur als formales Mittel zur Bestimmung eines geeigneten Koordinatensystems und kann natürlich nicht zur Lösung des Randwertproblems benutzt werden.

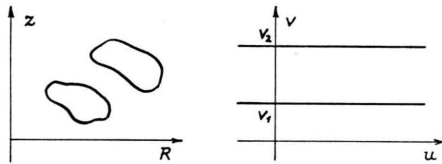


Abb. 5.

Im vorliegenden Fall gehören die Meridiankurven zwei Kreisen eines Kreisbündels an (nebst Grenzfällen), die konform auf parallele Gerade abgebildet werden müssen. Von den möglichen Elektrodenformen betrachten wir folgende technisch wichtigen Fälle:

(A) Die beiden Kreisbogen gehören Kreisen eines elliptischen Bündels an;  $m_1 \neq m_2$ .

Die Bündelgrundpunkte  $a, a^*$  können elementargeometrisch berechnet werden (Spiegelung mit reziproken Radien). Man findet  $a$  und  $a^*$  als (in unserem Falle reelle und verschiedene) Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} a, a^* &= \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - m_1^2 + m_2^2}{2(m_2 - m_1)} \\ &\pm \frac{\sqrt{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)^2 + (m_1 - m_2)^4 - 2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)(m_1 - m_2)^2}}{2(m_2 - m_1)} \\ &= \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - m_1^2 + m_2^2}{2(m_2 - m_1)} \\ &\pm \frac{\sqrt{[\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - (m_1 - m_2)^2]^2 - 4\varrho_1^2\varrho_2^2}}{2(m_2 - m_1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ein Koordinatensystem der gewünschten Art wird dann von den Kreisen des elliptischen Bündels mit

seinen Orthogonaltrajektorien, den Kreisen des hyperbolischen Bündels mit denselben Grundpunkten  $a, a^*$  gebildet. Beide Bündel können konform auf zwei orthogonale Geradenscharen  $r = \text{const}$  (Bilder der Kreise des elliptischen Bündels),  $\vartheta = \text{const}$  (Bilder der Kreise des hyperbolischen Bündels) abgebildet werden, so daß das Bild des Punktes  $R_0$  der Nullpunkt der  $r\vartheta$ -Ebene ist (Abb. 6).

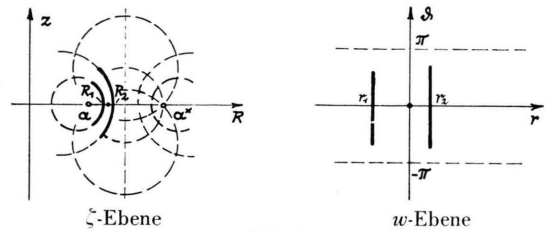


Abb. 6.

Mit den Abkürzungen

$$\zeta = R + iz; \quad w = r + i\vartheta; \quad k = \frac{a^* - R_0}{R_0 - a} \quad (|k| \neq 1)$$

lautet die komplexe Abbildungsfunktion

$$w = \ln k \frac{\zeta - a}{a^* - \zeta} \quad (\text{Hauptwert des Logarithmus}). \quad (2)$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} r &= \ln \left| k \frac{\zeta - a}{a^* - \zeta} \right| = \ln k + \frac{1}{2} \ln \frac{(R-a)^2 + z^2}{(R-a^*)^2 + z^2}, \\ \vartheta &= \arctan k \frac{\zeta - a}{a^* - \zeta} = \arctan \frac{z(a^* - a)}{(R-a)(a^* - R) - z^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{a^* e^{w} + a k}{k + e^{w}}; \quad \frac{d\zeta}{dw} = \frac{k(a^* - a)e^w}{(k + e^w)^2} = \frac{k(a^* - a)e^{i\vartheta}}{(k + e^{r+i\vartheta})^2}; \\ R &= \Re(\zeta) = \frac{a^* e^{2r} + k(a^* + a)e^r \cos \vartheta + a k^2}{k^2 + 2k e^r \cos \vartheta + e^{2r}}. \end{aligned}$$

Damit kann das Bogenelement in dem bei Rotation der  $Rz$ -Ebene um die  $z$ -Achse entstehenden räumlichen orthogonalen  $r\vartheta\varphi$ -Koordinatensystem angeschlossen werden:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 (dr^2 + d\vartheta^2) + R^2 d\varphi^2 \\ &= \frac{k^2 (a^* - a)^2 e^{2r} (dr^2 + d\vartheta^2) + Z^2 d\varphi^2}{N^2} \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Diese Methode wurde erstmals benutzt von C. NEUMANN, Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ring, Halle 1864.

mit den Abkürzungen

$$Z = a^* e^{2r} + k(a^* + a) e^r \cos \vartheta + a k^2, \\ N = e^{2r} + 2 e^r k \cos \vartheta + k^2.$$

Demnach lautet die Potentialgleichung für ein von  $\varphi$  unabhängiges Potential  $V = V(r, \vartheta)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Z}{N} \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \frac{Z}{N} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right] = 0. \quad (4)$$

Dabei ist stets im betrachteten elliptischen Fall ( $a \neq a^*$ )

$$N \geq (e^r - k)^2 > 0,$$

wie aus Gl. (3) folgt.

Wir setzen nun für  $V(r, \vartheta)$  als Näherung an

$$V(r, \vartheta) = V_0 + A r + B r^2 + C \vartheta^2 + D r^3 + E r \vartheta^2 \quad (5)$$

(infolge der Symmetrie zur Linie  $\vartheta = 0$  treten nur gerade Potenzen von  $\vartheta$  auf) und versuchen, die unbekannten Koeffizienten  $V_0, A, \dots, E$  mit Hilfe der Differentialgleichung (4) und der Randbedingungen zu bestimmen.

Entwickelt man den Ausdruck  $Z/N$  nach Potenzen von  $r, \vartheta$  und setzt ihn und die Darstellung (5) in (4) ein, so kann man genau zwei Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $A, \dots, E$  durch Vergleich der konstanten und der Glieder bei  $r^1$  erhalten. Es genügt also, in (4) den Quotienten  $Z/N$  bis zu den quadratischen Gliedern einschließlich nach Potenzen von  $r$  und  $\vartheta$  zu entwickeln.

$$Z = [a^* + k(a^* + a) + a k^2] \\ + [2 a^* + k(a^* + a)] r + \left[ 2 a^* + k \frac{a^* + a}{2} \right] r^2 + \dots, \\ \frac{1}{N} = \frac{1}{(1+k)^3} \left[ 1 + k - 2r + \frac{2-k}{1+k} r^2 + \dots \right], \\ \frac{Z}{N} \approx \frac{1}{(1+k)^2} \left\{ [a^* + k(a^* + a) + a k^2] + k(a^* - a) r \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{k(a^* - a)(k-1)}{k+1} r^2 + \frac{1}{2} \delta \vartheta^2 \right\}.$$

Da  $Z/N$  in  $\vartheta$  symmetrisch ist, tritt kein lineares Glied in  $\vartheta$  auf.

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = a^* + k(a^* + a) + a k^2, \quad \beta = k(a^* - a), \\ \gamma = \frac{k(a^* - a)(k-1)}{k+1}, \quad \delta$$

erhält man für (4):

$$(\alpha + \beta r) \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \right] + (\beta + \gamma r) \frac{\partial V}{\partial r} + \delta \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0. \quad (6)$$

Setzt man (5) ein, so findet man

$$(I) \quad \beta A + 2 \alpha B + 2 \alpha C = 0,$$

$$(II) \quad \gamma A + 4 \beta B + 2 \beta C + 6 \alpha D + 2 \alpha E = 0. \quad (7)$$

Die weiteren vier linearen Bestimmungsgleichungen erhält man durch die Bedingung, daß  $V(r, \vartheta)$  auf den Flächen  $F_1, F_2$  mit den Gleichungen  $r = r_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2$ ) konstant und gleich  $V_i$  ist:

$$(III) \quad V_0 + A r_1 + B r_1^2 + D r_1^3 = V_1,$$

$$(IV) \quad V_0 + A r_2 + B r_2^2 + D r_2^3 = V_2, \quad (8)$$

$$(V) \quad C + E r_1 = 0,$$

$$(VI) \quad C + E r_2 = 0.$$

Demnach gilt für die 6 unbekannten Koeffizienten  $V_0, A, B, C, D, E$  als Lösungen des linearen Gleichungssystems (7), (8):

$$V_0 \cdot \Delta = 6 \alpha^2 (r_1 V_2 - r_2 V_1) - 3 \alpha \beta (r_1^2 V_2 - r_2^2 V_1) \\ + (2 \beta^2 - \alpha \gamma) (r_1^3 V_2 - r_2^3 V_1), \\ A \cdot \Delta = -6 \alpha^2 (V_2 - V_1), \\ B \cdot \Delta = 3 \alpha \beta (V_2 - V_1), \\ C = 0, \\ D \cdot \Delta = -(2 \beta^2 - \alpha \gamma) (V_2 - V_1), \\ E = 0, \\ \Delta = 6 \alpha^2 (r_1 - r_2) - 3 \alpha \beta (r_1^2 - r_2^2) \\ + (2 \beta^2 - \alpha \gamma) (r_1^3 - r_2^3).$$

(B) Die beiden Kreisbogen gehören Kreisen eines hyperbolischen Büschels an.

Die Büschelgrundpunkte  $a, a^*$  ( $a = a_R + i a_z$ ) sind die Schnittpunkte der Kreise der beiden Bogen. Man erhält

$$a, a^* = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - m_1^2 + m_2^2}{2(m_2 - m_1)} \quad (10) \\ \pm i \frac{\sqrt{2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)(m_1 - m_2)^2 - (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)^2 + (m_1 - m_2)^4}}{2(m_2 - m_1)}, \\ = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - m_1^2 + m_2^2}{2(m_2 - m_1)} \\ \pm i \frac{\sqrt{4 \varrho_1^2 \varrho_2^2 - [\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - (m_1 - m_2)^2]^2}}{2(m_2 - m_1)}.$$

Der Radikand ist positiv.

Ein Koordinatensystem der gewünschten Art wird von den Kreisen des hyperbolischen und des dazu orthogonalen elliptischen Büschels gebildet. Beide Büschel können wieder konform auf zwei ortho-

gonale Geradenscharen  $\vartheta = \text{const}$  (Bilder der Kreise des hyperbolischen Büschels),  $r = \text{const}$  (Bilder der Kreise des elliptischen Büschels) abgebildet werden, so daß das Bild des Punktes  $R_0$  der Nullpunkt der  $\vartheta r$ -Ebene ist (Abb. 7). Die Gleichungen der beiden Kreisbogen seien  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_2$ .

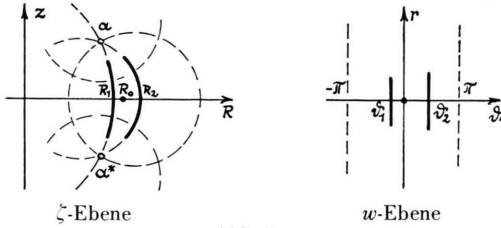


Abb. 7.

Mit den Abkürzungen

$$\zeta = R + iz; \quad w = \vartheta + ir; \quad k = \frac{a - R_0}{R_0 - a^*} = e^{i\kappa},$$

$$\kappa = 2 \arctg \frac{R_0 - aR}{a_z}, \quad (|k| = 1, \quad \kappa \neq \pi)$$

lautet die komplexe Abbildungsfunktion

$$w = i \ln k \frac{\zeta - a^*}{a - \zeta} \quad (\text{Hauptwert des Logarithmus}). \quad (11)$$

Demnach ist

$$r = \ln \left| \frac{\zeta - a^*}{a - \zeta} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{(R - aR)^2 + (z + a_z)^2}{(R - aR)^2 + (z - a_z)^2},$$

$$\vartheta = -\arctg k \frac{\zeta - a^*}{a - \zeta} = -\kappa - \arctg \frac{2a_z(R - aR)}{(R - aR)^2 + (z^2 - a_z^2)}. \quad (12)$$

Es ist

$$\zeta = \frac{a e^{-i w} + a^* k}{k + e^{-i w}}, \quad \frac{d\zeta}{dw} = \frac{2a_z k e^{-i w}}{(k + e^{-i w})^2} = \frac{2a_z e^{r+i(\kappa-\vartheta)}}{(e^{i\kappa} + e^{r-i\vartheta})^2};$$

$$R = \Re(\zeta)$$

$$= \frac{aR(1 + e^{2r}) + 2e^r[a_z \sin(\vartheta + \kappa) + aR \cos(\vartheta + \kappa)]}{1 + 2e^r \cos(\vartheta + \kappa) + e^{2r}}.$$

Damit erhält man für das Bogenelement in dem bei Rotation der  $Rz$ -Ebene um die  $z$ -Achse entstehenden räumlichen orthogonalen  $r\vartheta\varphi$ -Koordinatensystem

$$ds^2 = \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 (d\vartheta^2 + dr^2) + R^2 d\varphi^2 - \frac{4a_z^2 e^{2r} (d\vartheta^2 + dr^2) + Z^2 d\varphi^2}{N^2}$$

mit den Abkürzungen

$$Z = aR(1 + e^{2r}) + 2e^r[aR \cos(\vartheta + \kappa) + a_z \sin(\vartheta + \kappa)],$$

$$N = 1 + 2e^r \cos(\vartheta + \kappa) + e^{2r}.$$

Demnach lautet die Potentialgleichung für ein von  $\varphi$  unabhängiges Potential  $V = V(\vartheta, r)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \frac{Z}{N} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Z}{N} \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0. \quad (13)$$

Dabei ist wegen  $a_z \neq 0$  stets

$$N \geq (1 - e^r)^2 > 0,$$

wie aus Gl. (12) folgt.

Für  $V(\vartheta, r)$  wird als Näherung angesetzt

$$V(\vartheta, r) = V_0 + A\vartheta + B\vartheta^2 + Cr^2 + D\vartheta^3 + E\vartheta r^2 \quad (14)$$

(infolge der Symmetrie zur Linie  $r = 0$  treten nur gerade Potenzen von  $r$  auf). Die unbekannten Koeffizienten werden wie im Fall (A) bestimmt.

$$Z = 2[a_R(1 + \cos \kappa) + a_z \sin \kappa]$$

$$+ 2[-a_R \sin \kappa + a_z \cos \kappa]\vartheta - [a_R \cos \kappa + a_z \sin \kappa]\vartheta^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{2(1 + \cos \kappa)}$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{\sin \kappa}{1 + \cos \kappa} \vartheta + \frac{2 + \cos \kappa - \cos^2 \kappa}{(1 + \cos \kappa)^2} \cdot \frac{\vartheta^2}{2} + \dots \right\},$$

$$\frac{Z}{N} \approx \frac{1}{(1 + \cos \kappa)}$$

$$\cdot \left\{ [a_R(1 + \cos \kappa) + a_z \sin \kappa] + a_z \vartheta + a_z \tg \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\vartheta^2}{2} + \delta r^2 \right\}.$$

Da  $Z/N$  in  $r$  symmetrisch ist, tritt kein lineares Glied in  $r$  auf.

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = a_R + a_R \cos \kappa + a_z \sin \kappa, \quad \beta = a_z, \quad \gamma = a_z \tg \frac{\kappa}{2}, \quad \delta$$

erhält man für (13)

$$(\alpha + \beta \vartheta) \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right] + (\beta + \gamma \vartheta) \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \delta r \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad (15)$$

also formal den gleichen Ausdruck wie (6), wenn man  $r$  mit  $\vartheta$  vertauscht.

Dementsprechend sind die Konstanten  $V_0, A, B, C, D, E$  durch die Gln. (9) bestimmt, wenn  $r_1$  mit  $\vartheta_1$ ,  $r_2$  mit  $\vartheta_2$  vertauscht wird.

(C) Die beiden Kreisbogen gehören konzentrischen Kreisen an;  $m_1 = m_2 = m$  [Grenzfall von (A)].

Die konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt  $m$  und die Geraden durch  $m$  bilden dann ein Koordinatensystem der gewünschten Art. Dieses kann durch die Funktion



$$w = \ln \frac{\zeta - m}{R_0 - m} \quad (\zeta = R + i z; \quad w = r + i \vartheta) \quad (16)$$

auf zwei orthogonale Geradenscharen  $r = \text{const}$  (Bilder der konzentrischen Kreise),  $\vartheta = \text{const}$  (Bilder der Strahlen durch den Punkt  $m$ ) abgebildet werden, so daß das Bild des Punktes  $R_0$  der Nullpunkt der  $r \vartheta$ -Ebene ist (Abb. 8).

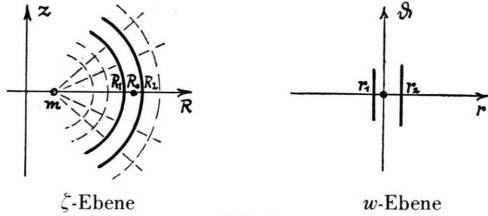


Abb. 8.

Es ist

$$r = \ln \left| \frac{\zeta - m}{R_0 - m} \right| = \frac{1}{2} \ln [(R - m)^2 + z^2] - \frac{1}{2} \ln (R_0 - m)^2,$$

$$\vartheta = \arctan \frac{\zeta - m}{R_0 - m} = \arctan \frac{z}{R - m};$$

$$\zeta = (R_0 - m) e^w + m, \quad \frac{d\zeta}{dw} = (R_0 - m) e^w;$$

$$R = \Re(\zeta) = (R_0 - m) e^r \cos \vartheta + m.$$

Damit wird das Bogenelement in dem bei Rotation der  $Rz$ -Ebene um die  $z$ -Achse entstehenden räumlichen orthogonalen  $r \vartheta \varphi$ -Koordinatensystem

$$ds^2 = e^{2r} (R_0 - m)^2 [dr^2 + d\vartheta^2] + [(R_0 - m) e^r \cos \vartheta + m]^2 d\varphi^2.$$

Für das von  $\varphi$  unabhängige Potential  $V(r, \vartheta)$  lautet die Potentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ [(R_0 - m) e^r \cos \vartheta + m] \frac{\partial V}{\partial r} \right\} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ [(R_0 - m) e^r \cos \vartheta + m] \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right\} = 0. \quad (17)$$

Der Näherungsansatz für  $V(r, \vartheta)$  ist

$$V(r, \vartheta) = V_0 + Ar + Br^2 + C \vartheta^2 + Dr^3 + Er \vartheta^2.$$

Die unbekannten Koeffizienten werden wie in den vorhergehenden Fällen bestimmt.

$$(R_0 - m) e^r \cos \vartheta + m \approx R_0 + (R_0 - m) (r + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \vartheta^2).$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = R_0, \quad \beta = \gamma = -\delta = R_0 - m$$

erhält man für (17)

$$(\alpha + \beta r) \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \right] + (\beta + \gamma r) \frac{\partial V}{\partial r} + \delta \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0. \quad (18)$$

Dies ist formal der gleiche Ausdruck wie (6). Mit

$$r_1 = \ln \left| \frac{\varrho_1}{R_0 - m} \right|, \quad r_2 = \ln \left| \frac{\varrho_2}{R_0 - m} \right|$$

findet man demnach aus (9)

$$\begin{aligned} V_0 \cdot \Delta &= 6 R_0^2 (r_1 V_2 - r_2 V_1) \\ &\quad - 3 R_0 (R_0 - m) (r_1^2 V_2 - r_2^2 V_1) \\ &\quad + (R_0 - m) (R_0 - 2m) (r_1^3 V_2 - r_2^3 V_1), \\ A \cdot \Delta &= -6 R_0^2 (V_2 - V_1), \\ B \cdot \Delta &= 3 R_0 (R_0 - m) (V_2 - V_1), \\ D \cdot \Delta &= -(R_0 - m) (R_0 - 2m) (V_2 - V_1), \\ C &= E = 0, \\ \Delta &= 6 R_0^2 (r_1 - r_2) - 3 R_0 (R_0 - m) (r_1^2 - r_2^2) \\ &\quad + (R_0 - m) (R_0 - 2m) (r_1^3 - r_2^3). \end{aligned} \quad (19)$$

In allen drei betrachteten Fällen fallen für die hier benutzte Näherung bis zu den Gliedern dritter Ordnung einschließlich die Äquipotentialflächen mit einer Schar der eingeführten Koordinatenflächen ( $r = \text{const}$  bzw.  $\vartheta = \text{const}$ ) zusammen. Dies ist ersichtlich nicht nur für die behandelten Kreisbogen, sondern allgemein für beliebige zur  $R$ -Achse symmetrische analytische Meridiankurven gültig, wenn man mit Hilfe einer konformen Abbildung die entsprechenden Koordinaten einführt.

Man kann die gefundenen Ergebnisse auch leicht mit exakt zu berechnenden Spezialfällen (Platten-, Zylinder-, Kugelkondensator) vergleichen. Es zeigt sich Übereinstimmung der angegebenen Formeln mit den Reihenentwicklungen bis zu den Gliedern dritter Ordnung der exakten Potentialfunktionen.

Die Darstellung des Potentialverlaufs im Gebiet der Randstörungen II verursacht Schwierigkeiten. Man kann bei bestimmten Annahmen durch eine längere Rechnung abschätzen, daß dieses Gebiet für

$$\Phi - \frac{d}{3 R_0} < |\varphi| < \Phi + 4 \frac{d}{R_0}$$

anzunehmen ist.

## II. Ermittlung der Kondensatorkonstanten bei vorgegebenen Feldgrößen

Nun soll die Aufgabe gelöst werden, für ein im ungestörten Gebiet I gegebenes Feld mit vorgeschriebenen Eigenschaften die entsprechenden Bestimmungsstücke des Toroidkondensators zu ermitteln. Die Feldgrößen sollen dabei in Zylinderkoordinaten  $R, z$  in einer Meridianebene vorgegeben sein,

da die in Abschnitt I verwendeten Koordinaten selbst von den Kondensatorkonstanten abhängen und deshalb unbekannt sind<sup>5</sup>.

Wir nehmen an, daß zunächst folgende Größen gegeben sind:

$$R_0, R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2, \Phi,$$

sowie das Potential  $V_0$  an der Stelle  $R=R_0, z=0$ . Der Feldverlauf ist dadurch noch nicht bestimmt.

Die Näherungsdarstellung des Potentials  $V$  um den Punkt  $R=R_0, z=0$  möge lauten

$$V(R, z) = V_0 + A^*(R - R_0) + B^*(R - R_0)^2 + C^* z^2 + D^*(R - R_0)^3 + E^*(R - R_0) z^2. \quad (20)$$

Bezeichnet man die  $R$ -Komponente der Feldstärke mit  $E_R$ , die  $z$ -Komponente mit  $E_z$ , so ist

$$\begin{aligned} A^* &= - (E_R)_{R_0, 0}, & B^* &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_R}{\partial R} \right)_{R_0, 0}, \\ C^* &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{R_0, 0}, & D^* &= - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 E_R}{\partial R^2} \right)_{R_0, 0}, \\ E^* &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 E_R}{\partial z^2} \right)_{R_0, 0} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial R} \right)_{R_0, 0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Von diesen 5 Größen können jedoch nicht alle, sondern nur 3 frei vorgegeben werden; die übrigen sind durch die Forderung, daß  $V(R, z)$  der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad (22)$$

genügen soll, bestimmt.

Nach Einsetzen von  $V(R, z)$  nach (20) in die Differentialgleichung (22) findet man durch Vergleich der konstanten Glieder und der Koeffizienten bei  $(R - R_0)$  ähnlich wie bei (7) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{A^*}{2 R_0} + B^* + C^* &= 0, \\ - \frac{A^*}{R_0^2} + \frac{2 B^*}{R_0} + 6 D^* + 2 E^* &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Bezeichnet man den Radius des Scheitelkrümmungskreises, der die Äquipotentiallinie im Punkte  $R=R_0, z=0$  berührt, mit  $\varrho_0$ , so ist

$$\varrho_0 = \frac{(E_R)_{R_0, 0}}{(\partial E_z / \partial z)_{R_0, 0}} = \frac{A^*}{2 C^*}, \quad (24)$$

wie aus Abb. 9 folgt; denn es ist

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_z}{E_R} = \frac{z}{(R - m_0)}$$

und für  $R \rightarrow R_0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{E_z}{z} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{R_0, 0} = \frac{(E_R)_{R_0, 0}}{\varrho_0}.$$

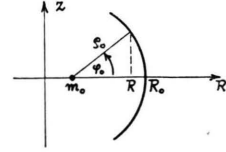


Abb. 9.

Da die durch  $R=R_0, z=0$  gehende Äquipotentiallinie in diesem Punkt einen Scheitel besitzt, berührt der Krümmungskreis mit dem Radius  $\varrho_0$  von mindestens dritter Ordnung. Wenn man also in der Umgebung dieses Punktes diese Äquipotentiallinie in der Form  $R - R_0 = F(z)$  und den Krümmungskreis in der Form  $R - R_0 = f(z)$  darstellt, so stimmen die Ableitungen der Funktionen  $F(z)$  und  $f(z)$  an dieser Stelle bis zur dritten Ordnung überein, der Unterschied  $F(z) - f(z)$  ist also von der Größe eines Gliedes vierter Ordnung.

Aus (23) folgt, wenn man etwa  $A^* \neq 0, C^*$  und  $D^*$  als frei wählbare Parameter auffaßt,

$$B^* = - \left( \frac{A^*}{2 R_0} + C^* \right), \quad E^* = \frac{A^*}{R_0^2} + \frac{C^*}{R_0} - 3 D^*. \quad (25)$$

Damit ist nach (20)

$$\begin{aligned} V(R, z) &= V_0 + A^*(R - R_0) - \left( \frac{A^*}{2 R_0} + C^* \right) (R - R_0)^2 \\ &\quad + C^* z^2 + D^*(R - R_0)^3 \\ &\quad + \left( \frac{A^*}{R_0^2} + \frac{C^*}{R_0} - 3 D^* \right) (R - R_0) z^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Durch (26) sind die Werte  $V_1$  und  $V_2$  des Potentials auf den Elektrodenflächen ebenfalls bestimmt:

$$V_1 = V(R_1, 0); \quad V_2 = V(R_2, 0).$$

Aus (24) kann noch die Größe

$$\begin{aligned} \varrho_0' &= \left( \frac{d\varrho_0(R)}{dR} \right)_{R_0} \\ &= \frac{(\partial E_z / \partial z)_{R_0, 0} (\partial E_R / \partial R)_{R_0, 0} - (E_R)_{R_0, 0} (\partial^2 E_z / \partial z \partial R)_{R_0, 0}}{(\partial E_z / \partial z)_{R_0, 0}^2} \\ &= - \frac{A^*}{C^* R_0} - 1 - \frac{A^{*2}}{2 C^{*2} R_0^2} + \frac{3 A^* D^*}{2 C^{*2}} \end{aligned}$$

berechnet werden.

Man kann nun auch  $A^*, \varrho_0$  und  $\varrho_0'$  als unabhängige Parameter einführen und findet dann

$$A^* = - (E_R)_{R_0, 0} = - E_0, \quad B^* = \frac{E_0}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\varrho_0} \right),$$

<sup>5</sup> Die Verwendung von Zylinderkoordinaten, die dem Problem nicht angepaßt sind, hätte in Abschnitt I zu einer Komplizierung der Formeln geführt.

$$C^* = -\frac{E_0}{2\varrho_0}, \quad D^* = -\frac{E_0}{6} \left[ \frac{1+\varrho_0'}{\varrho_0^2} + \frac{2}{R_0^2} + \frac{2}{\varrho_0 R_0} \right],$$

$$E^* = \frac{E_0}{2} \left[ \frac{1+\varrho_0'}{\varrho_0^2} + \frac{1}{\varrho_0 R_0} \right].$$

Damit ist

$$V(R, z) = V_0 - E_0 \left[ (R - R_0) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\varrho_0} \right) (R - R_0)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2\varrho_0} z^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{1+\varrho_0'}{\varrho_0^2} + \frac{2}{R_0^2} + \frac{2}{\varrho_0 R_0} \right) (R - R_0)^3 \right. \\ \left. - \left( \frac{1+\varrho_0'}{\varrho_0^2} + \frac{1}{\varrho_0 R_0} \right) (R - R_0) z^2 \right]. \quad (27)$$

Es soll noch gezeigt werden, wie sich die übrigen in Abschnitt I benützten Konstanten berechnen lassen:

Wenn man

$$\varrho_1 = \varrho_0, \quad \varrho_2 = \varrho_0 + \Delta\varrho;$$

$$m_1 = m_0, \quad m_2 = m_0 + \Delta m = m_0 + \Delta R - \Delta\varrho$$

setzt, wobei  $\Delta\varrho$ ,  $\Delta R$  kleine Größen sind, folgt aus früherem

$$a + a^* \approx \frac{-2\varrho_0 \Delta\varrho + 2m_0 \Delta R - 2m_0 \Delta\varrho}{\Delta R - \Delta\varrho},$$

$$a a^* \approx \frac{\varrho_0^2 \Delta R - \varrho_0^2 \Delta\varrho - 2\varrho_0 m_0 \Delta\varrho + m_0^2 (\Delta R - \Delta\varrho)}{\Delta R - \Delta\varrho}.$$

Für  $\Delta R \rightarrow 0$  ist demnach

$$a + a^* = 2 \frac{-\varrho_0 \varrho_0' + m_0(1-\varrho_0')}{1-\varrho_0'},$$

$$a a^* = \frac{(\varrho_0^2 + m_0^2)(1-\varrho_0') - 2m_0 \varrho_0 \varrho_0'}{1-\varrho_0'},$$

$$a, a^* = \frac{m_0(1-\varrho_0') - \varrho_0 \varrho_0'}{1-\varrho_0'} \pm \frac{\varrho_0 \sqrt{2\varrho_0' - 1}}{1-\varrho_0'}.$$

Dabei tritt für  $\varrho_0' > \frac{1}{2}$  der Fall A,

„  $\varrho_0' < \frac{1}{2}$  „ „ B,

„  $\varrho_0' = 1$  „ „ C

des Abschnittes I ein. Der Fall  $\varrho_0' = \frac{1}{2}$  sich berührender Kreise ist wegen seiner technischen Unwichtigkeit nicht behandelt.

Damit sind alle in Abschnitt I auftretenden Konstanten berechenbar und  $V(R, z)$  kann auch in den in Abschnitt I benützten speziellen Koordinaten dargestellt werden.

Herrn Prof. Dr. G. HETTNER und Herrn Dr. H. EWALD möchte ich für wertvolle Ratschläge und Literaturhinweise sehr danken.

## NOTIZEN

### Notiz über eine weitere reguläre Homologie-Lösung

Von WOLF HÄFELE

Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **11 a**, 163 [1956]; eingegangen am 9. Januar 1956)

Aus der Klasse der Homologie-Lösungen sind bisher drei reguläre Lösungen bekannt: a) Im kugeligen bzw. zylindrischen Fall die TAYLORSche Lösung<sup>1</sup>, die eine auslaufende Kugel- bzw. Zylinderwelle beschreibt, wie sie etwa durch eine Explosion zustande kommt, b) die GUDERLEYSche Lösung<sup>2</sup>, die eine kugelige bzw. zylindrische Stoßwelle beschreibt die auf das Symmetriezentrum zuläuft, dort reflektiert wird und dann wieder nach außen geht, und c) im ebenen Fall die Lösung, die vom Verfasser<sup>3</sup> untersucht wurde. Die Lösungskurve  $\mu(\nu)$  im Homologie-Diagramm der ebenen Homologie-Lösungen, die der TAYLORSchen Lösung entspricht, ergibt keine reguläre Lösung, weil für  $\xi = x/t^n \rightarrow 0$  die Dichte gegen 0 und die Temperatur gegen  $\infty$  geht bzw. umgekehrt (Separatrix III der zitierten Arbeit<sup>3</sup>). Der Druck geht gegen einen von  $\xi$  unabhängigen Wert. Läßt man den vollen Homologie-Ansatz zu, bei dem gilt

$$\varrho = t^d \cdot \varrho^*(\xi), \quad u = n \cdot t^{n-1} \cdot \nu(\xi),$$

$$a^2 = n^2 t^{2n-2} \mu^2(\xi), \quad \xi = x/t^n,$$

wo  $u$  Strömungs- und  $a$  Schallgeschwindigkeit,  $\varrho$  Dichte,  $x$  Ort,  $t$  Zeit,  $n$  und  $d$  Parameter sind, so gilt für den Einlauf nach P<sub>6</sub> (GUDERLEY-Verfasser-Nomenklatur), d. h. für

$$\varrho = t^d \cdot \text{const},$$

$$p = t^{2n-2+d} \cdot \text{const},$$

$$T = t^{2n-2} \cdot \text{const},$$

falls der Zusammenhang

$$d = 2 \cdot (1 - n) / (1 - \kappa)$$

besteht. ( $\kappa$  = Verhältnis der spezifischen Wärmen.)

Somit sind die Singularitäten im Punkt P<sub>6</sub> vermieden. Im allgemeinen wird eine Lösung des hier angegebenen Typs nicht die Bedingungen einer starken Stoßfront erfüllen. Nur für Fälle, in denen das Vorland einen speziellen Charakter hat, wird sich die Verträglichkeit mit den gegebenenfalls auch schwachen Frontbedingungen erreichen lassen. Indessen kann dieser Typ eventuell bei anders gelagerten Problemstellungen interessant sein.

<sup>1</sup> G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. **201**, 159 [1950].

<sup>2</sup> G. GUDERLEY, Luftfahrtforschg. **19**, 302 [1942].

<sup>3</sup> W. HÄFELE, Z. Naturforschg. **10 a**, 1006 [1955].